ASPI | Afarand Scholarly Publishing Institute; Turkey
ISSN: 2873-1973; Philosophical Thought. 2026;6(3):405-419. 10.58209/jpt.6.3.405

A Critique of Adopting Category Theory as a Framework for Ontological Structuralism

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Vahidnia M.*
School of Philosophy, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran

How to cite this article
Vahidnia M. A Critique of Adopting Category Theory as a Framework for Ontological Structuralism. Philosophical Thought. 2026;6(3):405-419.

ABSTRACT

Ontological structuralism aims to eliminate fundamental objects from ontology and elevate the status of relations. On the other hand, category theory offers a framework for representing a metaphysical view according to which (possible) worlds lack inner structure, including a domain of fundamental objects. To demonstrate this, we first rule out a naïve approach to category-theoretic structuralism, then examine the preferred approach at two levels of complexity (with respect to sets and relational structures). We establish that category-theoretic structuralism is committed to possible-world realism and, being limited to the resources of category theory, cannot distinguish the actual world in a non indexical way. Moreover, since the world is emptied of fundamental inner structure and relations are removed from this metaphysical picture along with objects, the resulting view aligns more closely with monism than structuralism. Apparently, structuralists have not fully considered these metaphysical consequences of adopting the category-theoretic framework.

Keywords Ontological Structuralism; Fundamental Object; Category Theory; Possible Worlds; Monism

***Correspondence**
Address: Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), School of Analytic Philosophy, Niavaran Square, Tehran, Iran. Postal Code: 19395-5746
Phone: +98 (21) 22803669
mvahidnia@ipm.ir

Article History
Received: June 15, 2026
Accepted: July 23, 2026
ePublished: July 29, 2026

CITATION LINKS

[Arenhart & Bueno, 2015] Structural realism and the nature of structure; [Bain, 2013] Category-theoretic structure and radical ontic structural realism; [Dasgupta, 2009] Individuals: An essay in revisionary metaphysics; [Dewar, 2019] Algebraic structuralism; [Dewar, 2022] Structure and equivalence; [Halvorson, 2019] The logic in philosophy of science; [Heller, 2016] Category free category theory and its philosophical implications; [Ladyman, 2023] Structural realism; [Ladyman *et al.*, 2007] Every thing must go: Metaphysics Naturalised; [Lal & Teh, 2017] Categorical generalization and physical structuralism: Figure 1; [Lam & Wüthrich, 2015] No categorial support for radical ontic structural realism; [Menzel, 2016] Possible worlds; [Reck & Schiemer, 2025] Structuralism in the philosophy of mathematics; [Schaffer, 2010] Monism: The priority of the whole; [Sider, 2008] Monism and statespace structure; [Spivak, 2017] Categories as mathematical models; [Vahidnia & Mesgari, 2022] Ontic structural realism and van Fraassen's criticism;

Copyright© 2026, the Authors | Publishing Rights, ASPI. This open-access article is published under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License which permits Share (copy and redistribute the material in any medium or format) and Adapt (remix, transform, and build upon the material) under the Attribution-NonCommercial terms.

نوع مقاله: پژوهشی اصیل

نقدی بر اتخاذ نظریه رسته‌ها به عنوان چارچوبی برای ساختارگرایی هستی‌شناختی

محمود وحیدنیا*
پژوهشکده فلسفه تحلیلی، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران

چکیده
ساختارگرایی هستی‌شناختی اشیای بنیادی را از هستی‌شناسی حذف کرده و جایگاه روابط را ارتقا می‌بخشد. از سوی دیگر، نظریه رسته‌ها چارچوبی برای بازنمایی مابعدالطبیعه‌ای فراهم می‌آورد که در آن جهان‌های ممکن فاقد ساختار درونی (از جمله دامنه‌ای از اشیای بنیادی) هستند. در همین راستا، نخست رهیافتی خام به ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای کنار گذاشته شده و رهیافت برگزیده در دو سطح پیچیدگی (مجموعه‌ها و ساختارهای رابطه‌ای) بررسی می‌گردد و چنین استدلال می‌شود که ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای متعهد به واقع‌گرایی درباره جهان‌های ممکن بوده و نیز با بسنده‌کردن به چارچوب نظریه رسته‌ها نمی‌تواند برجستگی جهان واقع را تضمین کند. همچنین، چون جهان به‌کلی از ساختار درونی بنیادی تهی گشته و روابط متعارف نیز به همراه دامنه اشیا از این تصویر مابعدالطبیعی کنار رفته‌اند، دیدگاه به‌دست‌آمده بیشتر تداعی‌گر گونه‌ای یگانه‌گرایی است تا ساختارگرایی. به نظر می‌رسد ساختارگرایان چنان که باید بدین پیامدهای مابعدالطبیعی اتخاذ چارچوب نظریه رسته‌ها آگاه نبوده‌اند.

کلیدواژگان: ساختارگرایی هستی‌شناختی، شی بنیادی، نظریه رسته‌ها، جهان‌های ممکن، یگانه‌گرایی

***نویسنده مسئول:** mvahidnia@ipm.ir
آدرس مکاتبه: تهران، میدان نیاوران، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده فلسفه تحلیلی
تلفن محل کار: ۲۲۸۰۳۶۶۹ (۰۲۱)

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۰۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۵/۰۷

مقدمه

ساختارگرایی هستی‌شناختی، به‌ویژه بدان معنا که در دهه‌های اخیر ذیل برنامه‌ای پژوهشی با عنوان *واقع‌گرایی ساختاری وجودی* (ontic structural realism) مطرح و پیگیری گشته، به طور کلی از یک سویه سلبی و یک سویه ایجابی برخوردار است [Ladyman, 2023; Ladyman & Ross, 2007; Vahidnia & Mesgari, 2022]. سویه سلبی به دنبال حذف اشیا (objects) یا اشیای فردی (individual objects) از هستی‌شناسی یا دست کم تنزیل جایگاه آنهاست (گاهی در این سویه ویژگی‌های درونی (intrinsic properties) نیز هدف این برنامه حذفی یا تنزیلی قرار می‌گیرند). برخی دیدگاه‌های ساختارگرایانه مقوله اشیا را به‌کلی از هستی‌شناسی [بنیادی] کنار می‌گذارند و برخی دیگر فردبودگی (individuality) اشیا (و به‌ویژه ذرات بنیادی) را انکار کرده یا وابسته به امور بیرونی (extrinsic) می‌سازند. سویه ایجابی بر آن است که به نحوی جایگاه روابط بنیادی یا کاملاً طبیعی (perfectly natural) را در هستی‌شناسی ارتقا دهد. برای مثال، اگر در دیدگاه‌های سنتی مابعدالطبیعی روابط بنیادی به روابط مکانی-زمانی محدود می‌شدند، برخی ساختارگرایان بر آن‌اند که روابط دیگری (برای مثال، روابط درهم‌تنیدگی کوانتومی (quantum entanglement)) را نیز در این زمره بشمارند و برخی نیز تا آنجا پیش می‌روند که همه کیفیات بنیادی را رابطه قلمداد کنند؛ بنابراین، در برخی روایت‌ها، سویه ایجابی ساختارگرایی مستلزم سویه سلبی ناظر به ویژگی‌های درونی است.

پس از ترسیم این نقشه اجمالی از ساختارگرایی هستی‌شناختی، می‌توانیم جستار کنونی را در آن جانمایی کنیم. نگاه ما در اینجا معطوف به گرایشی است که به‌ویژه بنا دارد سویه سلبی را با حذف اشیا از مقوله‌های بنیادی برآورده سازد، یعنی ساختارگرایی حذفی (یا گاهی به طور خلاصه حذف‌گرایی).[1] یک رهیافت بالقوه به

حذف‌گرایی بر نظریه رسته‌ها (category theory) استوار است که برای اولین بار توسط بین مطرح شد [Bain, 2013; Lam & Wüthrich, 2015; Lal & Teh, 2017]. به دلیل پیوند نظریه رسته‌ها در مبانی و فلسفه ریاضیات با گرایش‌های ساختارگرایانه [Reck & Schiemer, 2025: §4]، دست‌یازی بدان در صورت‌بندی ساختارگرایی هستی‌شناختی (درباره جهان فیزیکی) نیز تا حدی طبیعی به نظر می‌رسد. مخصوصاً که، از یک سو، در مبانی و فلسفه ریاضیات نظریه رسته‌ها، به نوعی، هم‌آورد یا بدیلی برای نظریه مجموعه‌ها بوده و از سوی دیگر، به معنایی مبنایی‌بودن نظریه مجموعه‌ها در فهم ما از چیستی ویژگی‌ها/روابط یا به طور کلی ساختارهاست که مانع اصلی پیش روی حذف‌گرایی‌ست؛ زیرا، فهم معمول نظریه مجموعه‌ای از ساختار یا ویژگی‌ها و روابط درون آن مصداقی (extensional) و نیازمند دامنه‌ای از اشیا است.

در بخش دوم، پس از ارایه دو صورت‌بندی از نظریه رسته‌ها، رهیافتی اولیه و خام به ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای را بررسی کرده و مردود خواهم شمرد. از این رهگذر، در بخش سوم به رهیافت برگزیده رهنمون شده و آن را در دو قالب رسته مجموعه‌ها و رسته ساختارهای رابطه‌ای معرفی خواهم کرد. رسته ساختارهای رابطه‌ای - به‌ویژه با توجه به تناظر با (مدل‌های) زبان مرتبه‌اول (first-order language) و صورت‌بندی‌های دیگر ساختارگرایی هستی‌شناختی - پیشنهاد آزمایشی و غیرنهایی من برای بازنمایی هستی‌شناسی بنیادی در چارچوب نظریه رسته‌هاست. در بخش چهارم، به دو پیامد ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای، یعنی فقدان برجستگی جهان واقع و حذف ویژگی‌ها و روابط (به همراه اشیا)، خواهم پرداخت. هر دو پیامد کمابیش چنین می‌رسانند که چارچوب نظریه رسته‌ها بیشتر مناسب صورت‌بندی یگانه‌گرایی (monism) است تا ساختارگرایی (به‌ویژه اگر نخواهیم از سویهٔ ایجابی دیدگاه اخیر چشم بپوشیم).

ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای؛ رهیافت خام

دست کم در نگاه نخست، معنای ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای تا حدی نامتعین و مبهم است. نخستین پرسش این است که یک رسته چگونه یک واقعیت فیزیکی را بازنمایی می‌کند؛ به طور خاص، ساختارگرا قاعدتاً می‌بایست تعیین کند که هر بخش رسته -اگر به‌تنهایی اهمیت بازنمایانه دارد- بازنمای چه امری در جهان است. بدین منظور، اجازه دهید نخست تعریفی از رسته فراهم آوریم.

$\mathcal{C}$ یک رسته است، اگر شرایط زیر را برآورد:[iii]

- دارای گردایه‌ای از راس‌ها[iii] باشد که آن را با $Obj(\mathcal{C})$ نشان می‌دهیم (مانند $A, B, \ldots$).
- دارای گردایه‌ای از پیکان‌ها باشد که آن را با $Arr(\mathcal{C})$ نشان می‌دهیم (مانند $f, g, \ldots$).[iv]
- هر پیکانی با یک راس به عنوان مبدا/دامنه و یک راس به عنوان مقصد/هم‌دامنه مرتبط است. این را که A و B به‌ترتیب مبدا و مقصد f هستند این‌گونه نشان می‌دهیم: $f: A \to B$ (یا معادلاً می‌نویسیم: $dom(f) = A$ و $codom(f) = B$). گردایه همه پیکان‌ها (در رسته $\mathcal{C}$) از A به B را $Arr_{\mathcal{C}}(A, B)$ می‌نامیم.
- برای هر دو پیکان، مانند $f: A \to B$ و $g: B \to C$، ترکیب‌شان، یعنی پیکان $g \circ f: A \to C$، وجود دارد. ترکیب خاصیت شرکت‌پذیری دارد؛ یعنی برای هر سه پیکان، مانند $f: A \to B$، $g: B \to C$، و $h: C \to D$: داریم: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- برای هر راسی چون A، پیکانی از A به خودش وجود دارد، با نماد "1_A"، که برای هر پیکانی چون $f: A \to B$ و $g: C \to A$، داریم: $f \circ 1_A = f$ و $1_A \circ g = g$. 1_A که با چنین تعریفی برای هر راس یکتاست، یک *این‌همانی* خوانده می‌شود.[v]

رسته‌ها، با چنین تعریفی، بسیار شبیه گراف‌هایی جهت‌دار (directed graphs) هستند (که طبیعتاً شرط‌های اضافه‌ای را برمی‌آورند). همین شاید کافی باشد برای این قضاوت اولیه که رسته‌ها به کار حذف‌گرا نمی‌آیند؛ زیرا، گراف‌های جهت‌دار (علاوه بر یال‌هایشان) راس هم دارند، و این با حذف‌گرایی درباره اشیا جور درنمی‌آید. با این همه، این داوری نخست کمی عجولانه است. اولاً، می‌توان رسته‌ها را به گونه‌ای بازتعریف کرد که دیگر راسی در کار نباشد؛ بدین معنا، راس‌ها در نظریه رسته‌ها اجتناب‌پذیر هستند. بگذارید ببینیم چنین تعریفی از رسته(ی بی‌راس) چگونه خواهد بود؛ این بار می‌گوییم:

- $\mathcal{C}$ یک رسته است، اگر شرایط زیر را برآورد:[vi]

دارای گردایه‌ای از پیکان‌ها باشد که آن را با $Arr(\mathcal{C})$ نشان می‌دهیم (مانند $f, g, \dots$).

- برخی (زوج‌های مرتب از) پیکان‌ها با هم ترکیب‌پذیرند. اگر f با g ترکیب‌پذیر باشد، حاصل ترکیب پیکانی است که به صورت $g \circ f$ نمایش داده می‌شود. ترکیب شرکت‌پذیر است؛ یعنی، اگر f با g و g با h ترکیب‌پذیر باشند، آنگاه $g \circ f$ با h، و f با $h \circ g$ نیز ترکیب‌پذیر بوده، و داریم $(g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- اگر پیکانی چون $g \circ f$ با h ترکیب‌پذیر باشد، آنگاه g هم با h ترکیب‌پذیر است. همچنین، اگر f با پیکانی چون $h \circ g$ ترکیب‌پذیر باشد، آنگاه f با g هم ترکیب‌پذیر است.
- برای هر پیکان، مانند f، پیکان i_1 و پیکان i_2 وجود دارند که i_1 با f و f با i_2 ترکیب‌پذیر بوده، و برای هر پیکان دلخواه، مانند g، اگر i_1 با g ترکیب‌پذیر باشد، $g \circ i_1 = g$، اگر g با i_1 ترکیب‌پذیر باشد، $i_1 \circ g = g$، اگر i_2 با g ترکیب‌پذیر باشد، $g \circ i_2 = g$، و اگر g با i_2 ترکیب‌پذیر باشد، $i_2 \circ g = g$. i_1 و i_2 هرکدام یک *این‌همانی* خوانده می‌شوند و با این تعریف برای هر پیکانی یکتا هستند.[vii]

به چه معنا می‌گوییم که هر دو مورد بالا هویاتی یکسان، یعنی رسته‌ها، را تعریف می‌کنند؟ برای سادگی در ارجاع، اجازه دهید به هویاتی که صورت‌بندی نخست تعریف می‌کند *رسته-۱* و به آنهایی که دومی تعریف می‌کند *رسته-۲* بگوییم.[viii] یک رسته-۱ دلخواه، مثلاً $\mathcal{X}$، را در نظر می‌گیریم. برای به‌دست‌آوردن رسته-۲ی متناظر با $\mathcal{X}$ در واقع کافی‌ست راس‌ها ($Obj(\mathcal{X})$) را حذف کرده و پیکان‌ها ($Arr(\mathcal{X})$) را با *روابطشان* نگه داریم. برای بیان دقیق‌تر همین نکته، $\mathcal{Y}$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

- پیکان‌های $\mathcal{Y}$ دقیقاً همان پیکان‌های $\mathcal{X}$ هستند ($Arr(\mathcal{Y}) := Arr(\mathcal{X})$).
- پیکان f با پیکان g (در $\mathcal{Y}$) ترکیب‌پذیر است، اگر و تنها اگر، (در $\mathcal{X}$) $codom(f) = dom(g)$.
- اگر f با g (در $\mathcal{Y}$) ترکیب‌پذیر باشد، $g \circ f$ در $\mathcal{Y}$ همان $g \circ f$ در $\mathcal{X}$ تعریف می‌شود.

اکنون، می‌توان به‌سادگی تحقیق کرد که $\mathcal{Y}$ یک رسته-۲ است (اثبات در پیوست الف). بنابراین، حذف راس‌ها از یک رسته-۱، یک رسته-۲ به دست می‌دهد، طوری که (ساختار) پیکان‌های رسته-۲ حاصل‌شده همان (ساختار) پیکان‌های رسته-۱ آغازین است. از سوی دیگر، می‌توان از یک رسته-۲ دلخواه نیز به رسته-۱ رسید که (ساختار) پیکان‌های دومی همان (ساختار) پیکان‌های اولی باشد. روشن است که این بار باید راس‌ها را به رسته-۲یمان

بیفزاییم تا یک رسته-۱ حاصل شود؛ بیان شهودی ایده این است که به ازای هر پیکان این‌همانی *درست همان‌جا* یک راس قرار می‌دهیم. برای بیان دقیق‌تر نکته، یک رسته-۲ دلخواه، مانند $\mathcal{Y}$، را در نظر گیرید. $\mathcal{X}$ را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

- دقیقاً به ازای هر این‌همانی در $\mathcal{Y}$، مانند i، راس متمایز O_i را در $Obj(\mathcal{X})$ قرار می‌دهیم ($Obj(\mathcal{X}) := \{O_i | \text{است } \mathcal{Y} \text{ یک این‌همانی در } i\}$).
- به ازای پیکان f در $\mathcal{Y}$، با این فرض که i_1 و i_2 این‌همانی‌های مرتبط با f در $\mathcal{Y}$ هستند (طوری که i_1 با f و f با i_2 ترکیب‌پذیر است)، پیکان متمایز $f: O_{i_1} \to O_{i_2}$ را در $Arr(\mathcal{X})$ قرار می‌دهیم.

می‌توان به‌راحتی تحقیق کرد که $\mathcal{X}$ی که بدین نحو ساخته می‌شود یک رسته-۱ است (اثبات در پیوست ب). از همه این تفاصیل برمی‌آید که یک رسته راس‌دار صرفاً با حذف راس‌ها و حفظ (ساختار) پیکان‌ها به یک رسته بی‌راس بدل می‌شود، و یک رسته بی‌راس هم صرفاً با افزودن راس‌ها درست همان جایی که پیکان‌های این‌همانی هستند و حفظ (ساختار) پیکان‌ها به یک رسته راس‌دار بدل می‌گردد. بنابراین، نظریه رسته‌ها (دست کم) دو صورت‌بندی هم‌ارز[۸] دارد که در یکی از آنها هیچ سخنی از راس‌ها نیست. بدین معنا بود که ادعا کردیم راس‌ها در نظریه رسته‌ها اجتناب‌پذیرند.

می‌توان گفت که دلیل اصلی هم‌ارزی این دو تعریف از رسته وجود تناظری یک‌به‌یک میان راس‌ها و این‌همانی‌ها در رسته‌های راس‌دار است. همین نکته می‌تواند بدین نگرانی دامن زند که حذف راس‌ها در صورت‌بندی دوم نظریه رسته‌ها سطحی و صوری است و نه حقیقی. به بیان دیگر، اگر کسی بخواهد به دلیل اجتناب‌پذیری راس‌ها در نظریه رسته‌ها این نظریه را چارچوبی برای صورت‌بندی ساختارگرایی حذفی قرار دهد، ممکن است با این اعتراض روبه‌رو شود که رسته‌های بی‌راس نیز *عملاً* دارای راس‌اند؛ زیرا در آنها نیز این‌همانی‌ها همان نقش راس‌های حذف‌شده را ایفا می‌کنند. ما در اینجا بیش از این بدین اعتراض محتمل نمی‌پردازیم، چون بر آنیم که این فهم نخست از ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای مشکل جدی‌تر و قاطع‌تری دارد.

در این رهیافت نخست به ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای، مفروض اصلی این است که هر رسته‌ای، به عبارتی، یک جهان/حالت ممکن (possible world/state) است (یا یک جهان/حالت ممکن را بازنمایی می‌کند). گویی، اگر تعریف نخست (راس‌دار) را ملاک قرار دهیم، در هر رسته‌ای راس‌ها بازنمای اشیای فیزیکی و پیکان‌ها بازنمای روابط میان اشیای فیزیکی هستند، و اگر تعریف دوم (بی‌راس) را که برای حذف‌گرا مناسب‌تر به نظر می‌رسد مبنا بگیریم، پیکان‌ها بازنمای روابط فیزیکی هستند. اما، مشکل اینجاست که پیکان‌های نظریه‌رسته‌ای نمی‌توانند بازنمای مناسبی برای روابط باشند. اولا، پیکان‌ها اساسا رفتاری شبیه روابط ندارند. آنها هویات متمایزی هستند که نظریه رسته‌ها پیش می‌نهد، و نحوه تعاملشان با راس‌ها و نیز یکدیگر توسط اصول موضوعه این نظریه معین گشته است. ثانیا، حتی اگر از مشکل نخست چشم پوشیده و پیکان‌ها را به نحوی نماینده روابط قلمداد کنیم، این هویات علی‌القاعده تنها می‌توانند روابط دوجایگاهی را بازنمایی کنند. این در حالی است که لزومی ندارد روابط بنیادی فیزیکی دوجایگاهی باشند، یا دست کم، به نظر نمی‌رسد این مطلوب باشد که چارچوب ما برای بازنمایی روابط بنیادی فیزیکی به طور پیشینی دوجایگاهی‌بودن همه آنها را تحمیل کند.

سرانجام، بیایید حتی از این محدودیت هم صرف نظر کنیم و فرض کنیم به طور پیشینی می‌دانیم که همه روابط بنیادی فیزیکی دوجایگاهی‌اند. فهم متداول (اگر نگوییم همگانی) از ویژگی‌ها/روابط این است که شباهت‌آور و/یا تحقق‌پذیر چندگانه‌اند؛ یعنی، بیش از یک شی یا بیش از یک چندتایی مرتب از اشیا می‌توانند

در رابطه یکسانی باشند (مثلاً، بیش از تنها یک زوج اشیا در رابطه فاصله دومتری‌داشتن هستند). حال، می‌پرسیم که یک پیکان واحد بازنمای خود رابطه (به مثابه یک امر تحقق‌پذیر چندگانه) است یا بازنمای مصداقی از آن است؟ اگر قرار است بازنمای خود رابطه باشد، آنگاه این نکته تحمیل خواهد شد که آن رابطه را تنها یک زوج مرتب محقق می‌کنند (یا در نگاه حذف‌گرا، آن رابطه تنها یک بار محقق شده است). اگر هم بگوییم پیکانی واحد تنها بازنمای مصداقی از یک رابطه است، آنگاه این نکته تحمیل خواهد شد که تنها یک رابطه فیزیکی وجود دارد (که مصادیق آن توسط پیکان‌های رسته بازنمایی می‌شوند).[x] مشکل به‌روشنی اینجاست که چارچوب نظریه رسته‌ها اجازه نمی‌دهد که، مثلاً، پیکان‌ها از چند گونه و متنوع باشند؛ یا می‌بایست دوبه‌دو ناهمگون قلمداد شوند و یا همگی همگون. حتی اگر بتوان با محدودیت دوجایگاهی‌بودن همه روابط کنار آمد، بسیار بعید است که بتوان با چنین محدودیتی در توان بازنمایی نظریه رسته‌ها -البته در این تلقی که هر رسته‌ای بازنمای جهان/حالتی ممکن است- کنار آمد.

ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای؛ رهیافت برگزیده

به‌رغم آنچه رفت، رهیافت دیگری به ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای نیز ممکن است که دست کم مشکلات اخیر را نداشته و همچنین با روح نظریه رسته‌ها و نقشی که این نظریه در مبانی ریاضیات ایفا می‌کند بسیار هم‌سوتر (از فهم پیشین) است. در اینجا، همان تعریف نخست (و راس‌دار) از رسته‌ها می‌تواند برای حذف‌گرا مناسب باشد،[xi] زیرا راس‌های یک رسته قرار نیست بازنمای اشیا باشند. بیان شهودی این تلقی این است که به جای اینکه هر راس از رسته بازنمای یک شی باشد، بازنمای یک جهان/حالت ممکن است.[xii] هر پیکان نیز بازنمای (برقراری) رابطه‌ای ساختاری میان این جهان‌ها/حالت‌های ممکن است. به بیانی دیگر، هر راس از رسته قرار است تمام یک ساختار را بازنمایی کند؛[xiii] ساختاری که هم‌سو با آنچه حذف‌گرا می‌پسندد (دست کم در سطح بنیادی) اساسا عناصری که بازنمای اشیای فیزیکی باشند دربر ندارد.[xiv]

این بیان مقدماتی و شهودی پیش‌آورنده انبوهی از ابهامات و پرسش‌هاست. در تلاش برای روشن‌سازی برخی از مهم‌ترین‌شان، هم (این روایت از) ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای را بیشتر خواهیم شناخت و هم به برخی کاستی‌ها و نقاط ضعف آن آگاه‌تر می‌شویم. گفتیم انتظار این است که هر راس درون یک رسته بازنمای ساختار یک جهان ممکن باشد؛ بدین ترتیب، خود رسته قاعدتاً می‌بایست بازنمای *فضای* (همه) جهان‌های ممکن قلمداد شود. اما، چگونه می‌توان تحقیق کرد که آیا نظریه رسته‌ها برای چنین وظیفه‌ای مناسب است یا خیر؟ به طور خاص، چگونه می‌توان دریافت که آیا نظریه رسته‌ها توان یا منابع کافی برای بازنمایی فضای جهان‌های ممکن را داراست؟ ساختار یا ساختار رابطه‌ای (relational structure) به معنای نظریه‌مجموعه‌ای را می‌توان زوج مرتبی چون (D, R) دانست، طوری که D دامنه‌ای از اشیا و R مجموعه‌ای از ویژگی‌ها/روابط روی D باشد.[xv] نخست، فرض کنید در ساختارهای مد نظر ما مجموعه ویژگی‌ها/روابط (یعنی R) تهی باشد؛ گویی جهان‌هایی که می‌خواهیم بازنمایی کنیم صرفاً مجموعه‌هایی از اشیا هستند (بدون هرگونه ساختار اضافه‌ای). در این صورت، هر راس از رسته (بازنمای) یک مجموعه خواهد بود و خود رسته، به تعبیری، (بازنمای) فضای همه مجموعه‌ها. این انتظارات ما را به رسته‌ای مهم و پرکاربرد راهنمایی می‌کنند.

رسته مجموعه‌ها: راس‌های رسته مجموعه‌ها *(the category of sets)* که با نماد Set شناخته می‌شود، مجموعه‌ها هستند و پیکان‌هایش توابع/نگاشت‌های میان این مجموعه‌ها. بیان دقیق‌تر نکته اخیر این است که برای هر A و Bی دلخواه در $Obj(Set)$، f عضوی از $Arr_{Set}(A, B)$ است، اگر و تنها اگر، f

تابع/نگاشتی از A به B باشد. روشن است که این‌همانی‌های Set دقیقاً همان توابع همانی هستند؛ یعنی، برای هر $A \in Obj(Set)$، $1_A = id_A$.

پیش از اینکه ببینیم آیا -حتی با این فرض بسیار ساده‌ساز که ساختارهای مد نظرمان صرفاً مجموعه‌هایی هستند بی‌هیچ ساختار اضافه‌ای- رسته Set می‌تواند به کار ساختارگرایی حذفی آید یا خیر، نیازمند تعریف دست کم دو مفهوم کلیدی دیگر در نظریه رسته‌ها (و تعبیر آنها در رسته Set) هستیم:

پیکان یک‌ریختی: پیکان $f: A \to B$ در رسته $\mathcal{C}$ یک یک‌ریختی است، اگر پیکانی مانند $g: B \to A$ وجود داشته باشد که $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$. g (در صورت وجود) یکتا بوده و آن را پیکان معکوس (inverse arrow) f نامیده و با f^{-1} نشان می‌دهیم.[xvi] در این صورت، A را با B یک‌ریخت (isomorph) می‌خوانیم. همچنین، روشن است که پیکان معکوس نیز یک‌ریختی بوده و $(f^{-1})^{-1} = f$. در نتیجه، یک‌ریخت‌بودن رابطه‌ای متقارن (میان راس‌های رسته) است و B نیز با A یک‌ریخت است.[xvii] یک‌ریختی‌های Set دقیقاً همان نگاشت‌های تناظر یک‌به‌یک هستند؛[xviii] از این رو، هر دو راس/مجموعه (درون Set) یک‌ریخت‌اند، اگر و تنها اگر، هم‌شمار باشند.

راس پایانی: اگر T راسی در رسته $\mathcal{C}$ باشد که به ازای هر عضو دلخواه از $\mathcal{C}$، مانند A، دقیقاً یک پیکان از A به T وجود داشته باشد ($|Arr_{\mathcal{C}}(A,T)| = 1$)، آنگاه T را یک راس پایانی (terminal object) می‌خوانند. راس پایانی، در صورت وجود در یک رسته، تا حد یک‌ریختی یکتاست.[xix] روشن است که راس‌های پایانی در رسته Set دقیقاً همان مجموعه‌های تک‌عضوی (singletons) هستند (که دوبه‌دو هم‌شمار و بنابراین یک‌ریخت‌اند).

حال، فرض کنید که T یک راس پایانی و S راس/مجموعه‌ای (دلخواه) در Set باشند. یک ملاحظه سرراست این است که میان پیکان‌هایی چون $f: T \to S$ و اعضای S تناظری یک‌به‌یک وجود دارد.[xx] این را می‌توان شهوداً بدین معنا گرفت که ساختار *درونی* راس‌های Set صرفاً از پیکان‌های این رسته قابل بازیابی است؛ گویی می‌توانیم از مجموعه‌بودن راس‌های Set صرف نظر کنیم. این نکته، اگر درست باشد، قاعدتاً برای حذف‌گرا خبر خوبی است. زیرا، به نظر نمی‌رسد که Set، به‌خودی‌خود، بتواند به کار او بیاید. راس‌های این رسته، چون خودشان مجموعه‌هایی دربردارنده اشیا هستند، به نظر نمی‌رسد بازنمای مناسبی برای ساختارهای (فیزیکی) *بی‌شی* باشند (وگرنه اساساً چه نیازی داشتیم به نقل مکان از نظریه مجموعه‌ها به نظریه رسته‌ها؟!).

بنابراین، فرض کنید Set را بدین شیوه مناسب‌سازی کنیم که به جای هر مجموعه (به مثابه راسی از راس‌های رسته) هویتی بنیادی (و بدون هرگونه ساختار درونی) قرار دهیم،[xxi] بی‌آنکه به (ساختار) پیکان‌ها دستی بزنیم. رسته‌ای که این‌گونه حاصل می‌شود را Set^* می‌نامیم. راس‌های Set^*، دست کم در مقایسه با راس‌های Set، بازنمای مناسب‌تری برای ساختارهای مد نظر حذف‌گرا هستند (توجه کنید که فعلاً این پیش‌فرض بسیار ساده‌ساز را داریم که مجموعه روابط در ساختارهای هدف تهی‌ست). در انتقال از Set به Set^*، از سویی، به یک معنا ساختار درونی راس‌ها را حذف کرده‌ایم و از سوی دیگر، *گویی* چندان اطلاعاتی را از دست نداده‌ایم. راس/مجموعه S و نیز راس پایانی T را (در Set) به یاد می‌آورید؛ فرض کنید نظایر آنها در Set^* (هویات بنیادی) S^* و T^* باشند. حال، هر پیکان، مانند $f: T^* \to S^*$، را می‌توان نماینده عضوی از S دانست که در Set^* توسط همین پیکان بازنمایی می‌شود. با این حال، این ادعا که در انتقال از Set به Set^* اطلاعاتی از دست نرفته، دست کم بدین شکل نامقیدش، قطعاً نادرست است. برای بیان دقیق‌تر منظورمان، از گزاره زیر کمک می‌گیریم:

گزاره: دو راس یک‌ریخت در یک رسته تمییزناپذیرند.[xxiii] به بیانی فنی‌تر، اگر A و B دو راس یک‌ریخت در رسته $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه، یک خودریختی (automorphism) -به معنای نظریه‌رسته‌ای- وجود دارد که A را به B می‌نگارد (اثبات در پیوست ج).

بدین ترتیب، در انتقال از Set به *Set، هرگونه تمایز (غیرعددی) میان راس‌های یک‌ریخت/مجموعه‌های هم‌شمار از دست می‌رود. اما این هنوز گویای تمام اطلاعاتی که از دست می‌رود نیست. باقی پیوندها و ارتباطات نظریه‌مجموعه‌ای، از قبیل اشتراک و اجتماع، نیز از دست می‌روند؛ در حقیقت، هر رابطه‌ای میان مجموعه‌ها که مبتنی بر چیزی بیش از شمار اعضای مجموعه‌های طرف آن رابطه باشد از دست می‌رود. با این همه، به نظر نمی‌رسد که این نکته برای حذف‌گرا نگران‌کننده باشد. مجموعه‌های هم‌شمار تنها در چیستی اعضایشان متفاوت‌اند، و لذا قاعدتاً از نقطه‌نظر حذف‌گرا هم‌ارز و بازنمای امکان یکسانی هستند. به بیانی دقیق‌تر، به نظر می‌رسد که حذف‌گرا می‌بایست از اینکه در بازنمایی وی از جهان‌های ممکن تمایزهای صرفاً مبتنی بر چیستی اعضای دامنه ساختار -تمایزهای این‌بودگی‌گرایانه (haecceitistic)- از میان رود استقبال نیز بکند.

حال، بیایید این پیش‌فرض ساده‌انگارانه را کنار بگذاریم که مجموعه ویژگی‌ها/روابط ساختارهای نظریه‌مجموعه‌ای آغازگر تحلیلمان تهی است. پرسش این است که آیا می‌توانیم رسته مناسبی تعریف کنیم که راس‌هایش (به جای مجموعه‌ها) ساختارهای رابطه‌ای باشند، یعنی اموری چون (D,R)ها، که D دامنه و R مجموعه‌ای از روابط روی آن دامنه است؟ طبعاً نخستین پرسش این است که پیکان‌های چنین رسته‌ای چیست‌اند:

هم‌ریختی: فرض کنید $S_1=(D_1,R_1)$ و $S_2=(D_2,R_2)$ دو ساختار رابطه‌ای باشند، و $\hbar: S_1 \to S_2$ نگاشتی که هر عضو از D_1 را به عضوی از D_2، و هر عضو از R_1 را به عضوی از R_2 می‌نگارد. $\hbar$ را یک هم‌ریختی (homomorphism) می‌خوانیم، اگر برای هر nتایی مرتب از اعضای D_1، مانند $(d_1,d_2,\dots,d_n)$، و هر عضو R_1، مانند r، داشته باشیم:

اگر $(d_1,d_2,\dots,d_n)\in r$، آنگاه $\big(\hbar(d_1),\hbar(d_2),\dots,\hbar(d_n)\big)\in \hbar(r)$.

(D,R)ها به همراه هم‌ریختی‌ها به مثابه پیکان‌های میانشان یک رسته را تشکیل می‌دهند؛[xxiii] آن را *رسته ساختارهای رابطه‌ای* نامیده و با RelStr نمایش می‌دهیم.[xxiv] دست کم یک دلیل برای مناسب‌بودن این تعریف از (پیکان‌های) رسته ساختارهای رابطه‌ای این است که وجود پیکان یک‌ریختی میان دو راس/ساختار رابطه‌ای مستلزم یک‌ریخت‌بودن آنها به معنای نظریه‌مجموعه‌ای[xxv] است (اثبات در پیوست د). در اینجا نیز، مشابه مورد Set، به نظر نمی‌رسد که RelStr چنان که هست انتظار ساختارگرای حذفی را برآورد. با پیش‌فرض‌های معقولی در باب وابستگی هستی‌شناختی، ساختار -به معنای نظریه‌مجموعه‌ای‌اش- وابسته به اشیا یا همان اعضای دامنه است.[xxvi] این به‌وضوح مطلوب حذف‌گرا نیست. از این رو، با ترفندی مشابه مورد Set (و انتقال به *Set) از RelStr نیز به *RelStr منتقل می‌گردیم؛ رسته اخیر، به تعبیری، همان رسته RelStr است که به جای راس‌هایش (که ساختارهای رابطه‌ای هستند) راس‌هایی بنیادی و بدون ساختار درونی قرار داده‌ایم، بی‌آنکه به (ساختار) پیکان‌ها دستی بزنیم. با این مقدمات، به نظر می‌رسد فضای (بازنمای) جهان‌های ممکن نزد ساختارگرای نظریه‌رسته‌ای می‌بایست رسته‌ای از قبیل *RelStr باشد. چگونه می‌توانیم دریابیم که آیا *RelStr برای اهداف ساختارگرای حذفی مناسب است یا خیر؟ مثلاً، یک پرسش مهم این خواهد بود که آیا هر دو راس نایک‌ریخت در *RelStr تمییزپذیرند یا خیر.[xxvii]

در اینجا قصد نداریم به این پرسش و دیگر جزییات درباره $RelStr^*$ بپردازیم. بر فرض موفقیت تحلیل فوق، می‌توان گفت که چنین رسته‌ای گزینه‌ای بالنسبه طبیعی برای ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای است، در حالی که به نظر می‌رسد مطالعه یا حتی معرفی آن در نوشتارگان پیرامون ساختارگرایی حذفی مغفول مانده است (البته که $RelStr^*$ همچنان دور است از اینکه گزینه‌ای واقع‌بینانه و/یا نهایی برای هستی‌شناسی بنیادی باشد، زیرا -برای مثال- مدل‌ها یا راه حل‌های معادلات میدان اینشتین ساختارهایی به‌مراتب پیچیده‌تر و غنی‌تر از ساختارهای رابطه‌ای به تعریف ما هستند).[xxviii]

برخی پیامدها و نگرانی‌ها

فقدان برجستگی جهان واقع

از تحلیل بخش پیشین برمی‌آید که ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای (در رهیافت برگزیده) می‌بایست نسبت به فضای جهان‌های ممکن، یعنی نسبت به رسته‌ای که دربرگیرنده ساختارهاست، تعهد وجودی داشته باشد. در فرآیند مناسب‌سازی RelStr برای حذف‌گرایی و تبدیل آن به $RelStr^*$، ساختارهای رابطه‌ای به‌کلی از پیچیدگی درونی‌شان تهی می‌شوند؛ اشیا و ویژگی‌ها/روابط هر جهان ممکن دیگر دست کم به مثابه امور بنیادی بازنمایی نمی‌شوند. از این رو، هرآنچه درباره آنها به عنوان حقایق نابنیادی/فروکاستنی قابل بازیابی باشد می‌بایست از حقایق بنیادی مربوط به پیکان‌های رسته ($RelStr^*$) به دست آید. بنابراین، هوادار ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای، دست کم در رهیافت کنونی، نمی‌تواند تنها به جهان واقع تعهد وجودی داشته باشد؛[xxix] بلکه، او می‌بایست به وجود همه جهان‌های ممکن و پیوندهای میان آنها (که به‌ترتیب توسط راس‌ها و پیکان‌های رسته بازنمایی می‌شوند) متعهد باشد، و این یعنی تعهد وجودی به کل رسته یا فضای جهان‌های ممکن.

گذشته از این، اگر چنین دیدگاهی تنها به منابع نظریه رسته‌ها برای توصیف مابعدالطبیعی بسنده کند، یکی از پیامدهایش این است که جهان واقع هیچ برجستگی بنیادینی نسبت به دیگر جهان‌های ممکن ندارد (هیچ چیزی در رسته نیست که مثلاً تعیین‌کننده این واقعیت باشد که جهان ممکنی که راس خاصی بازنمایی می‌کند محقق گشته، در حالی که جهان‌های ممکن بازنمایی‌شده توسط دیگر راس‌ها محقق نگشته‌اند). البته که برجستگی نظرگاهی (perspectival) یا اشاری (indexical) هر جهان (از جمله جهان واقع) برای باشندگانش محفوظ است.

این هر دو ویژگی، یعنی وجود و هم‌ردیفی بنیادی جهان‌های ممکن و برجستگی صرفاً اشاری جهان واقع یادآور نگاه دیوید لوئیس (David Lewis; 1941-2001) به جهان‌های ممکن است، که گاهی انضمامی‌گرایی (concretism) خوانده می‌شود.[xxx] به نظر می‌رسد که ساختارگرایی محضا نظریه‌رسته‌ای مستلزم گونه‌ای انضمامی‌گرایی است. زیرا، اگر ساختارگرا بخواهد جهان واقع را به نحوی در هستی‌شناسی‌اش متمایز و برجسته سازد، می‌بایست به چیزی ورای رسته جهان‌های ممکن نیز تعهد وجودی داشته باشد (یا به هر به شیوه دیگری برجستگی یک راس از این رسته را تامین کند و این نیازمند افزودن بخش یا جنبه‌ای به ایدئولوژی[xxxi] یا هستی‌شناسی است که در نظریه رسته‌ها، به‌خودی‌خود، ناموجود است).[xxxii، xxxiii]

تحلیل اخیر خود می‌تواند ما را به گریزگاهی مجردگرا (abstractionist) رهنمون شود. فرض کنید هر راس رسته‌ای چون $RelStr^*$ را نه بازنمای یک جهان ممکن (به مثابه امری انضمامی)، بلکه بازنمای یک ویژگی (به مثابه امری مجرد) تلقی کنیم که اگر محقق گردد یک جهان کامل به دست می‌دهد (می‌توانیم چنین ویژگی‌هایی را ابرویژگی بخوانیم). در این صورت، پیکان‌های $RelStr^*$ را می‌توان (با مسامحه) بازنمای روابط

(مرتبه‌دوم) میان این ابرویژگی‌ها تلقی کرد. سرانجام، نیازمند آن عنصر فرارسته‌ای در هستی‌شناسی (یا ایدئولوژی) هستیم. راهی متعارف و سرراست پذیرش دقیقاً یک شی بنیادی در هستی‌شناسی است، که دقیقاً یک ابرویژگی را نمونه‌دار (instantiate) می‌کند (تا جهان واقع را به دست دهد). بدین‌ترتیب، همزمان هم از انضمامی‌گرایی و هم از فقدان برجستگی جهان واقع گریخته‌ایم. این روایت ناخالص مجردگرا از ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای بیشتر به یگانه‌گرایی هستی‌شناختی نزدیک است.[xxiv] گونه دیگری از مجردگرایی این است که راس‌های رسته را بازنمای اوضاع امور بیشینه (maximal states of affairs) قلمداد کنیم. در این روایت، آنچه مابعدالطبیعه ما فراتر از رسته اوضاع امور نیاز دارد می‌تواند یک محمول بنیادی "... برقرار است" باشد، که دقیقاً بر یک وضع امور بیشینه صدق می‌کند (و جهان واقع را به دست می‌دهد).

بدین ترتیب، پیامد جانبی توجه به (فقدان) برجستگی جهان واقع، بازشناسی دو روایت کلی، یکی انضمامی‌گرا و محض و دیگری مجردگرا و ناخالص، از ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای است.

حذف ویژگی‌ها/روابط به همراه حذف اشیا

از مقدمه به یاد می‌آورید که ساختارگرایی هستی‌شناختی سویه‌ای ایجابی و سویه‌ای سلبی دارد. به بیانی اجمالی، سویه ایجابی بر ارتقای جایگاه روابط تاکید دارد، و سویه سلبی معطوف به حذف اشیای بنیادی است. یکی از راه‌های ارزیابی صورت‌بندی‌های ساختارگرایی هستی‌شناختی بررسی میزان موفقیت یک صورت‌بندی در تحقق این دو سویه است. اکنون، ادعای ما این است که ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای، به تعبیری، سویه ایجابی را فدای سویه سلبی کرده است. زیرا، به همان اندازه که در این صورت‌بندی (ارجاعات به) اشیای فیزیکی حذف شده‌اند، (ارجاعات به) ویژگی‌ها/روابط فیزیکی نیز حذف شده‌اند. در اینجا بازنمای یک جهان یک راس است که هیچ ساختار درونی‌ای ندارد؛ این بازنمایی همان قدر از ویژگی‌ها/روابط بنیادی تهی‌ست که از اشیای بنیادی.

نکته اخیر، به‌ویژه بسته به اینکه کدام روایت (انضمامی‌گرا و محض یا مجردگرا و ناخالص) از ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای را مد نظر داشته باشیم نیازمند اندکی ویرایش است. اولاً، ما تاکنون از این نگرانی طفره رفته بودیم که ساختارگرایی محضا نظریه‌رسته‌ای در هر جهان ممکن دقیقاً یک شی بنیادی را حفظ می‌کند (که خود همان جهان باشد). این در حالی است که، به‌ویژه اگر نگاهمان را به یک جهان محدود سازیم، هیچ ویژگی/رابطه بنیادینی بر جای نمی‌ماند. گویی چنین دیدگاهی در حذف ویژگی‌ها/روابط حتی از حذف اشیا فراتر می‌رود. ثانیاً، در روایت ناخالص نزدیک به یگانه‌گرایی هستی‌شناختی، دقیقاً یک شی بنیادی وجود دارد که تنها یک ابرویژگی (از یک رسته) را نمونه‌دار می‌سازد. پس آنچه ساختارگرایی در اینجا حذف می‌کند، به بیانی دقیق‌تر، کثرت اشیای بنیادی و کثرت ویژگی‌های بنیادی تحقق‌پذیر در جهانی واحد است. البته در این دیدگاه روابط بنیادی مرتبه‌اول نیز بی‌کم‌وکاست حذف شده‌اند. سرانجام، شاید موفق‌ترین گونه ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای در تحقق حذف‌گرایی آن روایت ناخالصی باشد که راس‌های رسته را بازنمای اوضاع امور بیشینه می‌داند. در اینجا اشیای بنیادی و نیز ویژگی‌ها/روابط درون‌جهانی، سراسر حذف شده‌اند.

فارغ از جداسازی روایت‌ها، می‌توان -با کمی گمانه‌زنی- چنین گفت که در ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای حذف ویژگی‌ها/روابط [متعارف] عمیق‌تر و برگشت‌ناپذیرتر از حذف اشیا [متعارف] است. زیرا، از یک سو، مشابه مورد Set^* و راس‌های پایانی‌اش، درباره $RelStr^*$ هم می‌توان بر پایه راس و پیکان‌های خاصی، (شمار) اعضای دامنه ساختارهای رابطه‌ای را بازیابی کرد.[xxv] از سوی دیگر، روشن نیست که چگونه می‌توان ویژگی‌ها/روابط ساختارهای رابطه‌ای را، دست کم به گونه‌ای سرراست مشابه اعضای دامنه، بازیابی نمود. گویی، بازیابی

سرراست‌تر اشیا نسبت به ویژگی‌ها/روابط موید فروکاست یا ابتنا سرراست‌تر حقایق مربوط به وجود اشیا نسبت به حقایق مربوط به برخورداری آنها از کیفیات گوناگون است.

از ملاحظات فوق چنین برمی‌آید که چارچوب نظریه رسته‌ها بیشتر مناسب صورت‌بندی آن دسته از دیدگاه‌های مابعدالطبیعی است که بر آن‌اند تا جهان را سراسر از ساختار درونی *بنیادی* تهی سازند (همچون یگانه‌گرایی)، نه ساختارگرایی هستی‌شناختی که در این باره میان اشیا و روابط قایل به تمایز است. شاید در پاسخ چنین گفته شود که ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای سویه ایجابی یا همان ارتقای جایگاه روابط را با بنیادی‌انگاشتن پیکان‌ها (یا به هر حال آنچه بازنمایی می‌کنند) برآورده می‌سازد؛ جهان‌های ممکن به‌تمامی توسط پیکان‌های میان یکدیگر متمایز و دارای کیفیات می‌گردند. در واکنش، ما به ذکر دو نکته بسنده می‌کنیم: اوّلاً، چنان که پیش‌تر نیز اشاره شد، پیکان‌های رسته -به معنای دقیق کلمه- نه رابطه که هویاتی از سنخ خاص خود و غیر از مقوله‌های سنتی مابعدالطبیعی هستند. ثانیاً، رابطه‌گرایی مدنظر ساختارگرایی هستی‌شناختی معطوف به رابطه‌های فیزیکی مرتبه‌اول، نظیر روابط مکانی-زمانی یا روابط درهم‌تنیدگی، بوده است. هرچه هست از این‌گونه رابطه‌گرایی نمی‌توان در ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای اثری یافت.

نتیجه‌گیری

تنها با نگاهی سهل‌گیرانی و/یا تاویلی (به سویه‌های) ساختارگرایی هستی‌شناختی است که می‌توان ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای را صورت‌بندی وفاداری از این دیدگاه برشمرد. نظریه رسته‌ها، اگر قرار است به عنوان چارچوبی برای صورت‌بندی یک دیدگاه مابعدالطبیعی به کار رود، بیشتر مناسب آن گرایشی است که جهان(های ممکن) را به‌کلی از ساختار درونی بنیادی تهی می‌سازد (گرایشی که به صریح‌ترین شکل در یگانه‌گرایی هستی‌شناختی یافت می‌شود). ساختارگرایی نظریه‌رسته‌ای مستلزم واقع‌گرایی درباره جهان‌های ممکن است و -حتی فراتر از آن- جهان‌های ممکن را (خواه انضمامی، خواه مجرد) بنیادی می‌شمارد. این دیدگاه، برای گریختن از انضمامی‌گرایی درباره جهان‌های ممکن و/یا فقدان هرگونه برجستگی بنیادی جهان واقع، نیازمند عنصری (هستی‌شناختی یا ایدئولوژیک) فراتر از منابع نظریه رسته‌هاست. به نظر می‌رسد که این پیامدهای مابعدالطبیعی آن‌گونه که باید در نوشتارگان ساختارگرایی درک نشده‌اند.

تشکر و قدردانی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تاییدیه اخلاقی: موردی برای گزارش وجود ندارد.
تعارض منافع: موردی برای گزارش وجود ندارد.
سهم نویسندگان: محمود وحیدنیا کل امور مقاله را انجام داده است (۱۰۰٪)
منابع مالی: موردی برای گزارش وجود ندارد.

پیوست

الف. اثبات رسته-۲بودن $\mathcal{Y}$

فرض کنید f با g و g با h (در $\mathcal{Y}$) ترکیب‌پذیر باشند؛ این یعنی (در $\mathcal{X}$) $codom(f) = dom(g)$ و $codom(g) = dom(h)$. این نتیجه می‌دهد که $g \circ f$، $h \circ g$ در $\mathcal{X}$ موجودند، و چون $codom(g \circ f) = codom(g) = dom(h)$ و $codom(f) = dom(g) = dom(h \circ g)$ (در $\mathcal{X}$)، $g \circ f$ با h، و f با $h \circ g$ ترکیب‌پذیرند (در $\mathcal{Y}$). حال، از سویی می‌دانیم $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ در $\mathcal{Y}$، به‌ترتیب، همان $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ در $\mathcal{X}$ هستند، و از سوی دیگر می‌دانیم که $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ در $\mathcal{X}$. نتیجه این است که همین برابری در $\mathcal{Y}$ نیز برقرار است.

همچنین، اگر $g \circ f$ با h ترکیب‌پذیر باشد (در $\mathcal{Y}$)، آنگاه $codom(g \circ f) = dom(h)$ (در $\mathcal{X}$)؛ از برابری اخیر به‌روشنی نتیجه می‌شود که $codom(g) = dom(h)$ (در $\mathcal{X}$)، و این مستلزم ترکیب‌پذیری g با h (در $\mathcal{Y}$) است. به همین ترتیب نتیجه می‌شود که اگر f با $h \circ g$ ترکیب‌پذیر باشد، آنگاه f با g هم ترکیب‌پذیر خواهد بود.

سرانجام، به‌راحتی می‌توان دید که برای هر f، $1_{dom(f)}$ و $1_{codom(f)}$ همان این‌همانی‌ها(ی i_1 و i_2) در $\mathcal{Y}$ هستند. زیرا، از آنجا که $dom(1_{codom(f)}) = codom(f)$ و $codom(1_{dom(f)}) = dom(f)$ (در $\mathcal{X}$)، نتیجه می‌شود که $1_{dom(f)}$ با f و f با $1_{codom(f)}$ ترکیب‌پذیرند (در $\mathcal{Y}$). باقی شرایط این‌همانی‌بودن در $\mathcal{Y}$ نیز دقیقاً همان (ترجمه) شرایط این‌همانی‌بودن در $\mathcal{X}$ هستند.

ب. اثبات رسته-ابودن $\mathcal{X}$

فرض کنید $f: O_i \to O_j$ و $g: O_j \to O_k$ دو پیکان در $\mathcal{X}$ باشند. بایستی نشان دهیم که ترکیب آنها، $g \circ f: O_i \to O_k$ در $\mathcal{X}$ وجود دارد. بر پایه فرضمان، می‌دانیم f و g پیکان‌هایی در $\mathcal{Y}$ بوده، و i و j این‌همانی‌های f، و j و k این‌همانی‌های g (در $\mathcal{Y}$) هستند. f با i، و j با g ترکیب‌پذیر است، در نتیجه f با $g \circ j$ ترکیب‌پذیر است، و در نتیجه f با g ترکیب‌پذیر است و $g \circ f$ وجود دارد. حال، توجه کنید که، از یک سو، i با f و در نتیجه با $g \circ f$ ترکیب‌پذیر بوده، و g با k، و در نتیجه $g \circ f$ با k ترکیب‌پذیر است؛ از سوی دیگر، i و k (در $\mathcal{Y}$) این‌همانی هستند. از این رو، i و k این‌همانی‌های مرتبط با $g \circ f$ در $\mathcal{Y}$ هستند، و بنابراین $g \circ f: O_i \to O_k$ پیکانی‌ست در $\mathcal{X}$.

برای تحقیق شرکت‌پذیری ترکیب پیکان‌ها در $\mathcal{X}$، فرض کنید $f: O_i \to O_j$، $g: O_j \to O_k$، و $h: O_k \to O_l$ پیکان‌هایی در $Arr(\mathcal{X})$ باشند. بر پایه نتیجه بند پیشین، $g \circ f: O_i \to O_k$ و $h \circ g: O_j \to O_l$ هم در $Arr(\mathcal{X})$ موجودند، و در پی آن، $h \circ (g \circ f): O_i \to O_l$ و $(h \circ g) \circ f: O_i \to O_l$ نیز چنین‌اند. پس کافی‌ست نشان دهیم دو پیکان اخیر یکی هستند. این نیز به‌روشنی از برابری $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ در $\mathcal{Y}$ نتیجه می‌شود (f با g و g با h (در $\mathcal{Y}$) ترکیب‌پذیرند و الی آخر).

سرانجام، می‌بایست وجود این‌همانی‌ها در $\mathcal{X}$ را تحقیق کنیم. راس دلخواهی چون O_i را در $Obj(\mathcal{X})$ در نظر بگیرید. i یک پیکان این‌همانی در $\mathcal{Y}$ است. از اینکه در $\mathcal{Y}$، i این‌همانی و، به‌اصطلاح، خودترکیب‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که $i: O_i \to O_i$ پیکانی است در $Arr(\mathcal{X})$. پیکان‌های دلخواه $f: O_i \to O_j$ و $g: O_i \to O_k$ در $\mathcal{X}$، متناظرند با f و g در $\mathcal{Y}$. f با i و i با g (در $\mathcal{Y}$) ترکیب‌پذیر بوده، و i در $\mathcal{Y}$ یک این‌همانی‌ست؛ در نتیجه $i \circ f = f$ و $g \circ i = g$ در $\mathcal{Y}$. اما، این بدین معناست که $f: O_j \to O_i$ همان $i \circ f: O_j \to O_i$، و $g: O_i \to O_k$ همان $g \circ i: O_i \to O_k$ است در $\mathcal{X}$. بنابراین، $i: O_i \to O_i$ در $\mathcal{X}$ این‌همانی است.

ج. اثبات گزاره (تمییزناپذیری راس‌های یک‌ریخت رسته)

فرض کنید $f: A \to B$ یک یک‌ریختی بوده، و $f^{-1}: B \to A$ معکوس آن باشد. حال، نگاشت $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ را بدین‌نحو تعریف می‌کنیم که $F(A) = B$ و $F(B) = A$ و برای هر راس متمایز از A و B، مانند X، $F(X) = X$. همچنین، باز هم برای هر راس متمایز از A و B، مانند X، اگر $g: X \to A$، آنگاه $F(g) = f \circ g$، اگر $g: A \to X$، آنگاه $F(g) = g \circ f^{-1}$، و اگر $g: X \to B$، آنگاه $F(g) = f^{-1} \circ g$. $F(g) = g \circ f$. اگر $g: A \to A$، آنگاه $F(g) = f \circ g \circ f^{-1}$، اگر $g: B \to B$، آنگاه $F(g) = f^{-1} \circ g \circ f$، اگر $g: A \to B$، آنگاه $F(g) = f^{-1} \circ g \circ f^{-1}$، و اگر $g: B \to A$، آنگاه $F(g) = f \circ g \circ f$. در غیر این صورت (یعنی اگر $dom(g) \neq A, B$ و $codom(g) \neq A, B$)، $F(g) = g$. نشان‌دادن اینکه F یک تابع‌گون (functor) است بسیار سرراست است.[xxxvi] اما، نکته اینجاست که F (به‌وضوح) روی راس‌های $\mathcal{C}$ تناظری یک‌به‌یک بوده، و به‌ازای هر دو راس دلخواه در $\mathcal{C}$، مانند X و Y، $F_{X,Y}$ نیز تناظری یک‌به‌یک است (به بیان دیگر، F یک خودریختی (automorphism) روی $\mathcal{C}$ است).[xxxvii] تنها برای نمونه، نشان می‌دهیم که برای Xی متمایز از A و B، $F_{X,A}$ تناظری یک‌به‌یک است. فرض کنید برای $g_1, g_2: X \to A$، داشته باشیم: $F(g_1) = F(g_2)$. بنا به تعریف، به دست می‌آوریم $f \circ g_1 = f \circ g_2$، $f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2)$، و سرانجام $g_1 = g_2$. این یعنی $F_{X,A}$ یک‌به‌یک است. برای اثبات پوشابودن، پیکان دلخواهی از $F(X)$ به $F(A)$ یا، معادلاً، از X به B در نظر می‌گیریم $g': X \to B$. روشن است که $f^{-1} \circ g': X \to A$. اما، داریم: $F(f^{-1} \circ g') = f \circ (f^{-1} \circ g') = g'$. مشابهاً، می‌توان نشان داد که $F_{X,Y}$، برای هر X و Yی دلخواه، تناظری یک‌به‌یک است. در نتیجه، F یک خودریختی است و A و B (به معنایی که در این گزاره مراد کرده‌ایم) تمییزناپذیرند.

د. استنتاج یک‌ریختی نظریه‌مجموعه‌ای از یک‌ریختی نظریه‌رسته‌ای

دو راس دلخواه $S_1(= (D_1, R_1))$، $S_2(= (D_2, R_2))$ در RelStr را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که اگر $f: S_1 \to S_2$ یک پیکان یک‌ریختی باشد، آنگاه S_1 و S_2 به معنای نظریه‌مجموعه‌ای یک‌ریخت‌اند. معادلا، اگر $f: S_1 \to S_2$ و $g: S_2 \to S_1$ هم‌ریختی بوده و $g \circ f = \mathrm{id}_{S_1}$ و $f \circ g = \mathrm{id}_{S_2}$، آنگاه f یک یک‌ریختی نظریه‌مجموعه‌ای است. اولاً، f یک‌به‌یک است؛ زیرا به ازای هر x و y (خواه هر دو شی و خواه هر دو روابطی در S_1 باشند)، اگر $f(x) = f(y)$، آنگاه $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$، آنگاه $\mathrm{id}_{S_1}(x) = \mathrm{id}_{S_1}(y)$، و آنگاه $x = y$. ثانیاً، f پوشاست؛ زیرا به ازای هر x در S_2 (خواه شی باشد، خواه رابطه)، $f(g(x)) = (f \circ g)(x) = \mathrm{id}_{S_2}(x) = x$. سرانجام اینکه، فرض کنید $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ یک nتایی مرتب از اعضای D_1، و r یک ویژگی/رابطه در R_1 باشد: اگر $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in r$، آنگاه $(f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_n)) \in f(r)$ (چون f هم‌ریختی‌ست)، آنگاه $(g(f(d_1)), g(f(d_2)), \dots, g(f(d_n))) \in g(f(r))$ (چون g هم‌ریختی‌ست)، آنگاه $((g \circ f)(d_1), (g \circ f)(d_2), \dots, (g \circ f)(d_n)) \in (g \circ f)(r)$، و آنگاه $(f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_n)) \in r$ (چون $g \circ f = \mathrm{id}_{S_1}$)؛ بنابراین، $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in r$، اگر و تنها اگر، $(f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_n)) \in f(r)$. بر این اساس، S_1 و S_2 یک‌ریخت هستند.

منابع

- Arenhart JRB, Bueno O (2015). Structural realism and the nature of structure. European Journal for Philosophy of Science. 5:111-139.
- Bain J (2013). Category-theoretic structure and radical ontic structural realism. Synthese. 190:1621-1635.
- Dasgupta S (2009). Individuals: An essay in revisionary metaphysics. Philosophical Studies. 145(1):35-67.
- Dewar N (2019). Algebraic structuralism. Philosophical Studies. 176(7):1831-1854.
- Dewar N (2022). Structure and equivalence. Cambridge: Cambridge University Press.
- Halvorson H (2019). The logic in philosophy of science. Cambridge: Cambridge University Press.
- Heller M (2016). Category free category theory and its philosophical implications. Logic and Logical Philosophy. 25(4):447-459.

- Ladyman J (2023). Structural realism. Zalta EN, Nodelman U, editors. Stanford: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2023 edition).
- Ladyman J, Ross D, Spurrett D, Collier J (2007). Every thing must go: Metaphysics Naturalised. Oxford: Oxford University Press.
- Lal R, Teh N (2017). Categorical generalization and physical structuralism: Figure 1. British Journal for the Philosophy of Science. 68(1).
- Lam V, Wüthrich C (2015). No categorial support for radical ontic structural realism. British Journal for the Philosophy of Science. 66(3):605-634.
- Menzel C (2016). Possible worlds. Zalta EN, Nodelman U, editors. Stanford: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2025 edition).
- Reck E, Schiemer G (2025). Structuralism in the philosophy of mathematics. Zalta EN, Nodelman U, editors. Stanford: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2025 edition).
- Schaffer J (2010). Monism: The priority of the whole. Philosophical Review. 119(1):31-76.
- Sider T (2008). Monism and statespace structure. Royal Institute of Philosophy Supplements. 62:129-150.
- Spivak DI (2017). Categories as mathematical models. In: Categories for the working philosopher. Landry E, editor. Oxford: Oxford University Press. p. 381-401.
- Vahidnia M, Mesgari AA (2022). Ontic structural realism and van Fraassen's criticism. Journal of Recognition. 14(2):223-252. [Persian]

پی‌نوشت

[i] هرچند، در ارزیابی پایانی، به میزان توفیق پیشنهاد مربوطه در برآورده‌ساختن سویه ایجابی ساختارگرایی هستی‌شناختی نیز خواهم پرداخت.

[ii] این شرط‌ها به‌وضوح مستقل از یکدیگر *نیستند*؛ در واقع چنین است که از سومین مورد به بعد هر شرطی اساساً با فرض برآوردگی شرط‌های پیشین بیان‌شدنی است.

[iii] برای پرهیز از خلط با کاربرد فراوان *شی* در این مقاله به همان معنای سنتی مابعدالطبیعی، ما شی رسته‌ای را *راس* خواهیم خواند.

[iv] گاهی برای سادگی تنها می‌گوییم راس یا پیکانی در رسته $\mathcal{C}$ (به جای اینکه بگوییم، به‌ترتیب، در $Obj(\mathcal{C})$ یا $Arr(\mathcal{C})$).

[v] فرض کنید $1_A: A \to A$ و $1'_A: A \to A$، و هر دو شرایط این‌همانی را برآورده سازند. آنگاه این‌همانی‌بودن 1_A نتیجه می‌دهد: $1'_A = 1'_A \circ 1_A$، و این‌همانی‌بودن $1'_A$ نتیجه می‌دهد: $1'_A \circ 1_A = 1_A$؛ از این دو برابری نتیجه می‌شود: $1_A = 1'_A$.

[vi] در صحت‌سنجی این تعریف از مقاله هلر کمک گرفته‌ایم [Heller, 2016].

[vii] فرض کنید i_1 و i'_1 هرکدام یک این‌همانی باشد که با f ترکیب‌پذیر است. نخست می‌توان دید که هر یک با دیگری ترکیب‌پذیر است؛ i_1 با f ترکیب‌پذیر است، و چون i'_1 این‌همانی‌ست ($f = f \circ i'_1$)، داریم که i_1 با i'_1 ترکیب‌پذیر است. بر پایه شرط سوم از تعریف (کنونی) رسته، i_1 با i'_1 هم ترکیب‌پذیر است (و مشابهاً، i'_1 با i_1). حال، این‌همانی‌بودن i'_1 نتیجه می‌دهد که $i_1 = i_1 \circ i'_1$، و این‌همانی‌بودن i_1 نتیجه می‌دهد که $i_1 \circ i'_1 = i'_1$؛ این دو برابری مستلزم این است که $i_1 = i'_1$. استدلال کاملاً متناظری نشان خواهد داد که اگر i_2 و i'_2 هرکدام یک این‌همانی باشد که f با آن ترکیب‌پذیر است، آنگاه $i_2 = i'_2$. همچنین، توجه کنید که این‌همانی‌ها، به‌اصطلاح، خودترکیب‌پذیرند؛ چون i_1 با f ترکیب‌پذیر است، و i_1 این‌همانی است ($f \circ i_1 = f$)، i_1 با $f \circ i_1$ هم ترکیب‌پذیر بوده و بر پایه شرط سوم تعریف (کنونی) رسته، i_1 با i_1 ترکیب‌پذیر است (و مشابهاً، i_2 با i_2 ترکیب‌پذیر است). روشن است که بلافاصله هم نتیجه می‌شود که $i_1 = i_1 \circ i_1$ (و $i_2 = i_2 \circ i_2$).

[viii] می‌توان گفت که صورت‌بندی *طبیعی* خوانش نخست از نظریه رسته‌ها (که موضوع آن رسته-۱ها هستند) در یک زبان مرتبه‌اول دوگونه‌ای (two-sorted) انجام می‌پذیرد، که در آن ترکیب یک تابع دوجایگاهی است که برخی زوج‌های مرتب از پیکان‌ها را به پیکان دیگری می‌برد. البته هر نظریه دوگونه‌ای را می‌توان با افزودن دو محمول (مثلاً در اینجا محمول‌های ... *رأس است* و ... *پیکان است*) به زبانی تک‌گونه‌ای ترجمه کرد. کمابیش روشن است که خوانش دوم از نظریه رسته‌ها (که موضوع آن رسته-۲ها هستند) یک صورت‌بندی *طبیعی* مرتبه‌اول تک‌گونه‌ای (one-sorted) دارد. برای آنچه در پی می‌آید توجه به این نکته مهم است که در همه این صورت‌بندی‌ها پیکان‌ها اموری هستند که مدلول متغیرها یا به طور کلی ترم (term)ها هستند، و نه مدلول محمول‌ها یا نمادهای تابعی. به یک بیان شهودی، پیکان‌ها خود رفتار شی‌گونه دارند و نه رفتار رابطه یا تابع‌گونه.

[ix] بیان ما از این هم‌ارزی کمابیش شهودی و متناسب با نیازهای مقاله کنونی بود. بیان دقیق‌تر آن هم به راه‌های نحوی (ترجمه‌محور) و هم به راه‌های معنایی (یک‌ریختی‌محور) میسر است.

[x] گذشته از این که رفتار متفاوت پیکان‌ها اجازه می‌دهد که میان دو راس رسته مصادیق متعددی از آن رابطه واحد وجود داشته باشد.

[xi] دقیق‌تر این است که بگوییم در اینجا تعریف راس‌دار از رسته‌ها ناسازگاری یا تنشی با حذف‌گرایی ندارد؛ این که نهایتاً این چارچوب تا چه اندازه برای ساختارگرایی حذفی *مناسب* است در ادامه کمی روشن‌تر خواهد شد.

[xii] برای سادگی، در این تقریر نخستین چنین فرض کرده‌ایم که جهان خود یک شی نیست. در بخش پیشاپایانی بدین نکته بازمی‌گردیم.

[xiii] نکته‌ای عجیب این است که آرنهارت و بوئنو رهیافت نظریه‌رسته‌ای بین به واقع‌گرایی ساختاری وجودی را بر همین مبنا که تعریف استاندارد رسته راس/شی‌محور است رد می‌کنند [Arenhart & Bueno, 2015] و به اینکه بین صراحتاً راس‌های رسته‌ها را نماینده *ساختارها* تلقی می‌کند و نه اشیای فیزیکی هیچ اشاره‌ای ندارند [Bain, 2013]:

«... برای هر مجموعه ساختارمند (structured set)، رسته‌ای وجود دارد که راس‌ها در آن همان‌گونه مجموعه‌های ساختارمند و ریخت‌ها (morphisms) [یا پیکان‌ها] توابعی هستند که ساختار مجموعه را حفظ می‌کنند. ... این بدین معناست که شهودهای واقع‌گرای ساختاری وجودی را می‌توان حفظ کرد بدین ترتیب که در سیاق کنونی ساختار راسی در یک رسته تعریف شود».

[xiv] می‌توانید این تقریر را با لم و ووتریچ مقایسه کنید [Lam & Wüthrich, 2015].

[xv] گزینه‌های (احیاناً واقع‌بینانه‌تر) دیگر برای تعریف نظریه‌مجموعه‌ای ساختار این است که مولفه دوم، R، را چندمجموعه (multiset) یا مجموعه نمایه‌دار (indexed set) بگیریم. تعریف ساده‌تر متن اصلی برای بحث کنونی ما بسنده است. ما ضمناً بدین نکته توجه داریم که ساختار به تعریف فوق با درک نظریه‌مدلی ساختار نیز فاصله چندانی ندارد؛ اگر (D, I) یک σ-ساختار (نظریه‌مدلی) باشد، طوری که σ علامت (signature) زبان، D دامنه، و I نگاشت تعبیر است، آنگاه $(D, I[\sigma])$ یک ساختار نظریه‌مجموعه‌ای به معنای فوق است (اگر $I[\sigma]$ تصویر نگاشت تعبیر باشد).

[xvi] فرض کنید $g: B \to A$ و $g': B \to A$ هر یک پیکانی معکوس باشند؛ آنگاه داریم: $g' = 1_A \circ g' = (g \circ f) \circ g' = g \circ (f \circ g') = g \circ 1_B = g$.

[xvii] در حقیقت به‌سادگی می‌توان دید که یک‌ریخت‌بودن رابطه‌ای هم‌ارزی است.

[xviii] دو مجموعه در $Obj(\mathrm{Set})$، مانند A و B، یک‌ریخت‌اند، اگر و تنها اگر، پیکان یک‌ریختی $f: A \to B$ وجود داشته باشد، اگر و تنها اگر، دو پیکان $f: A \to B$ و $g: B \to A$ وجود داشته باشند که $g \circ f = 1_A$ و $f \circ g = 1_B$، اگر و تنها اگر، نگاشتی چون f که یک‌به‌یک (معادل وجود یک g که $g \circ f = \mathrm{id}_A$) و پوشا (معادل وجود یک g که $f \circ g = \mathrm{id}_B$) است از A به B وجود داشته باشد.

[xix] فرض کنید T_1 و T_2 هرکدام راسی پایانی در رسته $\mathcal{C}$ باشند. دقیقاً یک پیکان از T_1 به T_2 و دقیقاً یکی از T_2 به T_1 وجود دارد؛ آنها را به‌ترتیب $f_1: T_1 \to T_2$ و $f_2: T_2 \to T_1$ می‌نامیم. داریم $f_2 \circ f_1: T_1 \to T_1$ و $1_{T_1}: T_1 \to T_1$؛ اما، این بر پایه پایانی‌بودن T_1 مستلزم این است که $f_2 \circ f_1 = 1_{T_1}$ (دقیقاً یک پیکان از T_1 به خودش وجود دارد، و لذا هر پیکانی از T_1 به خودش این‌همانی است). همین‌طور، با استدلال متقارنی خواهیم داشت: $f_1 \circ f_2 = 1_{T_2}$. پس f_1 یک یک‌ریختی است، و T_1 و T_2 یک‌ریخت‌اند.

[xx] با این فرض که t همان عضو یکتای T باشد، به ازای هر $a \in S$، $f_a: T \to S$ را چنین تعریف می‌کنیم که $f_a(t) = a$. روشن است که نگاشت $a \mapsto f_a$ از S به $Arr_{\mathbf{Set}}(T, S)$ یک‌به‌یک و پوشاست.

[xxi] شاید چیزی از قبیل عناصر نخستین (urelements) در نظریه مجموعه‌های ناخالص (impure set theory)؛ عناصر نخستین اموری‌اند که خود مجموعه نیستند ولی می‌توانند اعضای مجموعه‌ها باشند.

[xxii] خوب است این نکته را متذکر شویم که اگر پیکان‌هایمان نام/برچسب داشته باشند، و حضور این نام/برچسب‌ها در توصیف (تمییزدهنده) یک راس مجاز باشد، آنگاه به‌وضوح راس‌های یک‌ریخت هم تمییزپذیر هستند. برای مثال، اگر $f: A \to B$ پیکان یک‌ریختی باشد، آنگاه وصف/فرمول $x = dom(f)$ تنها بر A و نه B صدق خواهد کرد. پیش‌فرض تلویحی این حکم که راس‌های یک‌ریخت یک دسته تمییزناپذیرند این است که شرط لازم برای تمییزپذیری A از B (یا بالعکس) وجود وصف/فرمولی *کیفی* است که تنها بر یکی از این دو (و نه دیگری) صدق کند، با این توضیح که وصف/فرمول کیفی آنی‌ست که از نام راس‌ها یا پیکان‌ها خالی‌ست. به بیانی شهودی، اینجا مراد آن‌گونه تمییزپذیری است که تنها از ناحیه ساختار (پیکان‌های) رسته تضمین می‌گردد.

[xxiii] راس‌های دلخواه $S_1 (= (D_1, R_1))$، $S_2 (= (D_2, R_2))$، و $S_3 (= (D_3, R_3))$ را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان دید که اگر $\hbar: S_1 \to S_2$ و $\hbar': S_2 \to S_3$ هم‌ریختی باشند، آنگاه $\hbar' \circ \hbar$ نیز هم‌ریختی‌ست. همچنین، برای هر $S (= (D, R))$، نگاشت همانی روی S، یعنی id_S، به‌وضوح یک هم‌ریختی است (بنابراین، $1_S = \mathrm{id}_S$). سرانجام، چون ترکیب نگاشت‌ها (به طور کلی) شرکت‌پذیر است، ترکیب هم‌ریختی‌ها نیز شرکت‌پذیر است.

[xxiv] برخلاف مورد Set، این نام و نماد برساخته ماست.

[xxv] برای منظور مقاله کنونی چنین تعریفی بسنده است:

یک‌ریخت‌بودن (نظریه‌مجموعه‌ای): فرض کنید $S_1 = (D_1, R_1)$ و $S_2 = (D_2, R_2)$ دو ساختار رابطه‌ای باشند. می‌گوییم S_1 با S_2 یک‌ریخت است، اگر نگاشتی چون $i: S_1 \to S_2$ (که هر عضو D_1 را به عضوی از D_2 و هر عضو R_1 را به عضوی از R_2 می‌نگارد) وجود داشته باشد، که روی دامنه و نیز روی مجموعه ویژگی‌ها/روابط تناظری یک‌به‌یک بوده، و برای هر nتایی مرتب از اعضای D_1، مانند $(d_1, d_2, \dots, d_n)$، و هر عضو R_1، مانند r، داشته باشیم:

$$(d_1, d_2, \dots, d_n) \in r \text{، اگر و تنها اگر، } \big(i(d_1), i(d_2), \dots, i(d_n)\big) \in i(r)$$

(در این صورت، i را یک یک‌ریختی نظریه‌مجموعه‌ای می‌خوانیم.)

[xxvi] کمی دقیق‌تر بگوییم: اگر هر مجموعه به اعضایش وابستگی هستی‌شناختی داشته باشد، و وابستگی هستی‌شناختی نیز رابطه‌ای تراگذری باشد، ویژگی‌ها، روابط، و ساختارها، با تعاریف معمول نظریه‌مجموعه‌ای‌شان، وابسته هستی‌شناختی به اعضا/اشیا هستند.

[xxvii] درباره مفهوم تمییز(نا)پذیری دو راس در بحث کنونی بالاتر در پانوشتی توضیحاتی دادیم. همچنین، ثابت کردیم که یک‌ریختی (دو راس در یک رسته) مستلزم تمییزناپذیری آنهاست؛ یعنی (عکس نقیض آن:) تمییزپذیری مستلزم نایک‌ریختی است. در اینجا پرسش از عکس این گزاره است (که در حالت کلی و برای هر رسته دلخواه برقرار نیست): آیا در رسته RelStr^*، نایک‌ریختی مستلزم تمییزپذیری است؟ این دغدغه بی‌شک با قضیه‌ای مهم در نظریه رسته‌ها به نام *لم یونِدا* (Yoneda lemma) مرتبط است [Spivak, 2017: 393].

[xxviii] سادگی RelStr^* نسبت به رسته مدل‌های نظریه‌های واقعی علمی عذر کافی برای خودداری از مطالعه آن نیست. این نکته از جمله چنین تقویت می‌گردد که در برخی نمونه‌های مهم دیگر از صورت‌بندی ساختارگرایی هستی‌شناختی نیز زبان مرتبه‌اول ملاک بوده است [Dasgupta, 2009; Dewar, 2019]. پیش‌تر در پی‌نوشتی به نزدیکی ساختارهای نظریه‌مدلی (مرتبه‌اول) به ساختارهای رابطه‌ای، یعنی راس‌های RelStr، اشاره کردم.

[xxix] این نکته به یک معنا بدیهی است؛ زیرا تعهد صرف به ساختار جهان واقع -نزد ساختارگرای نظریه‌رسته‌ای- یعنی تعهد صرف به راس/شیئی بنیادی و بسیط!

[xxx] برای مدخلی به دیدگاه‌های رقیب پیرامون جهان‌های ممکن منزل را ببینید [Menzel, 2016].

[xxxi] مراد ما از ایدئولوژی در بحث کنونی مجموعه مفاهیم پایه‌ای است که در صورت‌بندی یک نظریه مابعدالطبیعی به کار می‌روند.

[xxxii] می‌توان گفت که در نظریه رسته‌ها نکته فوق به جای اینکه یک کاستی باشد نزدیک به یک ویژگی مطلوب ذاتی است. راس‌های یک رسته هر یک بازنمای یک مدل از یک نظریه ریاضی (یا علمی) قلمداد می‌شوند؛ البته به‌ویژه درباره نظریه‌های ریاضی گاهی یک مدل را نیز، به‌خودی‌خود، می‌توان یک رسته دانست [Halvorson, 2019: 180-182; Dewar, 2022: 31-38] (برای مثال، یک گروه -یعنی یک مدل برای نظریه گروه‌ها- رسته‌ای است دقیقاً با یک راس که همه پیکان‌هایش یک‌ریختی‌اند)، ولی کمی پیش‌تر استدلال کردم که نظیر این امکان برای ساختارگرایی هستی‌شناختی گزینه معقولی به نظر نمی‌رسد.

[xxxiii] کمی عجیب است که، بنا به بررسی ما، دست کم در مهم‌ترین مقاله‌های انتشاریافته پیرامون ساختارگرایی هستی‌شناختی نظریه‌رسته‌ای تاکنون کسی متذکر این پیامد مهم -یعنی فقدان برجستگی جهان واقع- نشده است.

[xxxiv] اگر نبود تمایز میان هویت و رفتار پیکان‌های رسته و روابط، دیدگاه پیشنهادشده در متن از برخی روایت‌های اصلی یگانه‌گرایی [Sider, 2008; Schaffer, 2010] کمابیش تمییزناپذیر می‌گردید.

[xxxv] ادعا می‌کنیم که در RelStr راس یا راس‌های مورد نظر ساختارهایی رابطه‌ای از قبیل $(\{d\},\emptyset)$ هستند (که دامنه‌ای تک‌عضوی و مجموعه‌ای تهی از ویژگی‌ها/روابط دارند). می‌توان دید که پیکان‌های آغازگر از $(\{d\},\emptyset)$ و واصل به ساختار رابطه‌ای دلخواهی چون (D,R) در تناظری یک‌به‌یک با اعضای D هستند (هر هم‌ریختی/پیکان تنها با تعیین اینکه d را به کدام عضو در D می‌نگارد معین می‌گردد). البته امثال $(\{d\},\emptyset)$ راس‌های پایانی نیستند؛ زیرا، به ازای R ناتهی هیچ پیکانی از (D,R) به $(\{d\},\emptyset)$ وجود ندارد (هرچند اگر R تهی باشد دقیقاً یکی موجود است).

[xxxvi] تعریف تابع‌گون: اگر $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند، یک *تابع‌گون* از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، مانند F $(F:\mathcal{C}\to\mathcal{D})$، نگاشتی‌ست که:

- هر راس از $\mathcal{C}$ را به راسی در $\mathcal{D}$ می‌نگارد؛ یعنی برای هر $X\in Obj(\mathcal{C})$، $F(X)\in Obj(\mathcal{D})$.
- هر پیکان از $\mathcal{C}$، مانند $f:X\to Y$، را به پیکانی چون $F(f):F(X)\to F(Y)$ در $\mathcal{D}$ می‌نگارد.
- برای هر این‌همانی در $\mathcal{C}$، مانند 1_X، $F(1_X)=1_{F(X)}$.
- برای هر دو پیکان در $\mathcal{C}$، مانند $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$، $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$.

[xxxvii] تعریف $F_{X,Y}$: اگر $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ یک فانکتور باشد، و $X,Y\in Obj(\mathcal{C})$، آنگاه، $F_{X,Y}$ به عبارتی تحدید F به دامنه پیکان‌های میان X و Y است؛ یعنی، $F_{X,Y}:Arr_{\mathcal{C}}(X,Y)\to Arr_{\mathcal{D}}\big(F(X),F(Y)\big)$، و برای هر $f:X\to Y$، $F_{X,Y}(f)=F(f)$.